Geometrische Struktur und Freiformarchitektur

Johannes Wallner, TU Graz   Helmut Pottmann, KAUST und TU Wien

Die Realisierung von freien Formen in der Architektur mit Hilfe der zur Verfügung stehenden Hilfsmittel und unter Berücksichtigung von ästhetischen Vorgaben zieht seit geraumer Zeit die Aufmerksamkeit nicht nur von Architekten, sondern auch von Ingenieuren und Mathematikern auf sich. Während es vom Prinzip her einfach ist, eine beliebige Form durch ein Dreiecksnetz zu ersetzen und als Stahl-Glas-Konstruktion zu realisieren, will man sich oft nicht darauf beschränken und einigen dort auftretenden Detailproblemen ausweichen, und ist daher bestrebt, freie Formen auch in Vierecksnetze mit ebenen Facetten, Sechsecksnetze, oder in eine Folge von abwickelbaren Blechstreifen aufzulösen – alle diese Aufgaben sind schwieriger. Für einen effizienten Zugang zu all diesen Problembereichen sind geometrische Überlegungen in Verbindung mit Methoden des Computer Aided Geometric Design und mathematischer Optimierung notwendig, bevor die übliche Auslegung und Berechnung nach den Regeln der Ingenieurskunst durchgeführt werden kann.

Es ist besonders interessant vom Standpunkt der Tradition der Darstellenden Geometrie in Österreich, dass die elementare Raumgeometrie einen entscheidenen Beitrag zur Durchdringung dieses Problemkreises und zum Ausbau von systematischen Lösungsmethoden liefert. Letztere verdrängen langsam den traditionellen Zugang, der hauptsächlich auf Versuchen, Irrtum und Beharrlichkeit beruht und nur aufgrund des bei solchen Projekten enormen Aufwandes gerechtfertigt war. Die Vorarbeiten aus dem Bereich der Geometrie über Eigenschaften von Dreiecks- und Vierecksnetzen (ohne Bezug zu Fragestellungen der Architektur) begannen in den 1950er Jahren mit Robert Sauer in München (siehe sein 1970 erschienes Werk ‘Differenzengeometrie’) und anderen Autoren, zum Beispiel Walter Wunderlich. Die jüngeren Beiträge, auch die in diesem Artikel diskutierte Arbeit über Freiformarchitektur, bei denen die TU Wien federführend ist, sind in dem Gebiet der Diskreten Differentialgeometrie zusammengefasst. Dieses hat in den letzten Jahren einen enormen Aufschwung genommen, was an der Schönheit der Theorie und seiner Relevanz sowohl für die klassische Differentialgeometrie als auch für die geometrische Datenverarbeitung liegt.

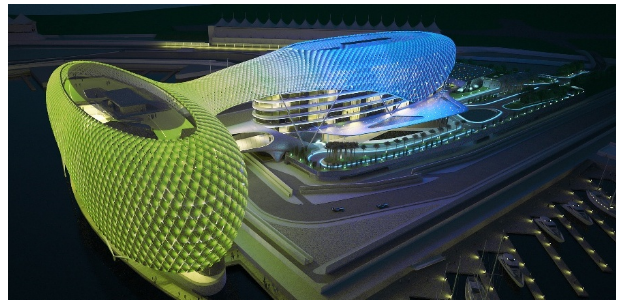


Abbildung 1: Das Yas Island Hotel in Abu Dhabi, durch welches die Formel 1-Rennstrecke führt (Asymptote Architecture; Computermodell).

Abbildung 2: Yas Island Hotel. Links: Testaufbau am Werksgelände von Waagner-Biro Stahlbau, Wien. Rechts: Montage.

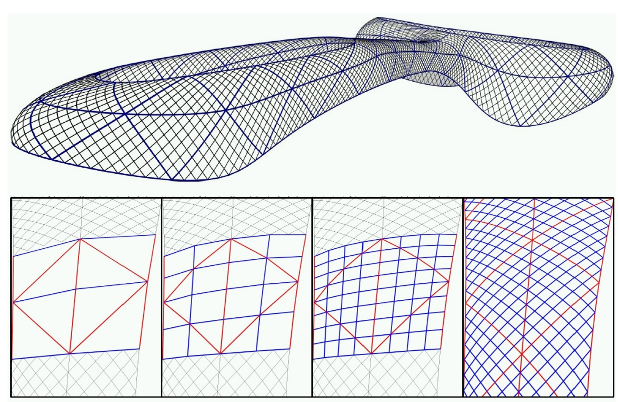
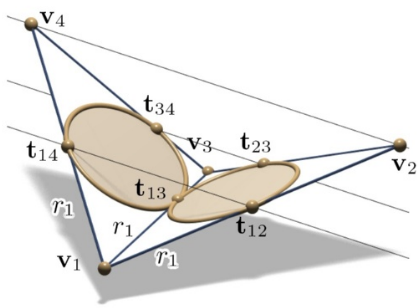


Abbildung 3: Das dem Yas Island Hotel zugrundeliegende Vierecksnetz (oben) wurde durch einen Unterteilungsalgorithmus und Übergang zu Diagonalen erzeugt (Evolute GmbH).

Effizientes Modellieren und Optimieren

Ein häufig verwendetes Prinzip für das effiziente Modellieren von freien Formen besteht darin, letztere von wenigen interaktiv steuerbaren Elementen abhängig zu machen. Diese Prozedur kennt man zum Beispiel von Splineflächen. Im Zusammenhang mit der Optimierung von Netzen benützt man jedoch eher die bekannten Unterteilungsalgorithmen aus der Computergraphik (z.B. die Algorithmen von Doo-Sabin oder von Catmull-Clark). Mit ihrer Hilfe kann ein grobes Netz, sei es ein Dreiecksnetz oder ein Vierecksnetz, verfeinert werden – falls gewüscht, im Limes bis hin zu einer glatten Fläche. Zur Illustration siehe Abb. 3: Variable bei der Formoptimierung sind die Knoten eines groben Vierecksnetzes, von dem das dem Bauwerk zugrundliegende Netz erst abgeleitet wird; siehe auch Abbildung 10.

Räumliche Kreispackungen



Als konkrete geometrische Struktur erwähnen wir Dreiecksnetze mit der Eigenschaft, dass die Inkreise benachbarter Dreiecke einander berühren. Es ist nicht schwer zu sehen, dass dies genau dann geschieht, wenn die Summen der Längen gegenüberliegender Seiten in dem hier entstehenden windschiefen Viereck gleich sind, und dass dann die vier restlichen Berührpunkte Inkreis—Seite auf einem gemeinsamen Kreis liegen. Es stellt sich heraus, dass jedes einfach geschlossene Dreiecksnetz mit Rand und ohne Löcher auf diese Eigenschaft hin optimierbar ist. Die spezielle geometrische Konfiguration benachbarter Elemente erlaubt die Konstruktion abgeleiter Strukturen, von denen Abbildungen 4 und 5 Beispiele zeigen. Wir gehen nicht ins Detail, sondern verweisen auf den Artikel von A. Schiftner et al. [2009].

Die Lösungstheorie des zugrundeliegenden Optimierungsproblems ist eng mit der komplexen Funktionentheorie und den winkeltreuen Abbildungen zwischen Flächen verknüpft und scheint mathematisch schwierig zu sein. Es zeigt sich hier wie auch

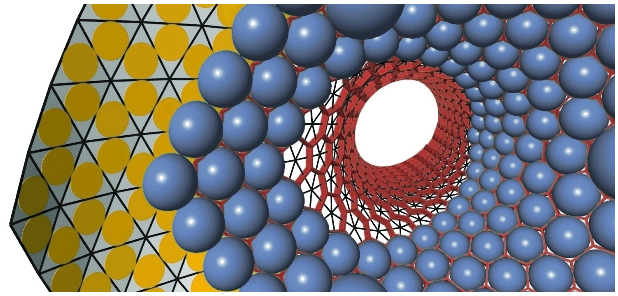


Abbildung 4: Dreiecksnetz mit der Eigenschaft, dass die Inkreise (orange) benachbarter Dreiecke einander berühren und zwei davon abgeleitete Strukturen: Packung von Kugeln (blau) und Sechseckswabenstruktur (rot). Jedes planare Teil der letzteren berührt 2 Kugeln und schneidet 2 Inkreise orthogonal.

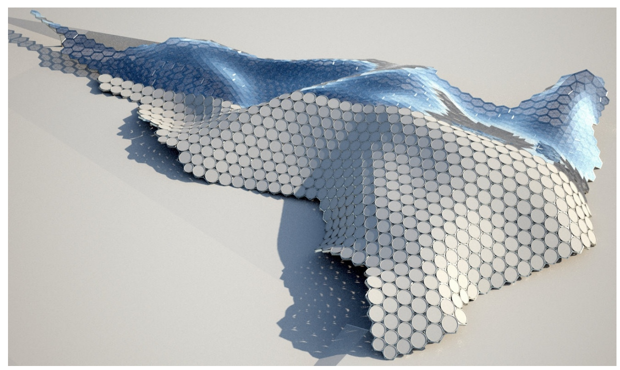


Abbildung 5: Auflösung einer Freiformfläche in eine approximative Kreispackung, deren Kombinatorik regulär sechszählig ist. Diese Konstruktion beruht auf einem Dreiecksnetz analog zu Abbildung 4 (Figur: H. Schmiedhofer).

an anderen Stellen ganz deutlich, dass raumgeometrisches Wissen die Grundlage für das Verständnis der lokalen Beziehungen zwischen den einzelnen Elementen in großräumigen geometrischen Strukturen darstellt, dass aber das effiziente Arbeiten mit letzteren die vereinten Kräfte von reiner Mathematik, angewandter Mathematik und Informatik erfordert: um die prinzipielle Lösbarkeit zu entscheiden, um ein Lösungsverfahren zu finden, und um schließlich das Verfahren tatsächlich durchzuführen. Trotzdem ist es keine Übertreibung, der Raumgeometrie eine Schlüsselrolle zuzuschreiben.

Ebene Vierecksnetze

Für die Ausführung von Stahl-Glas-Konstruktionen ist die Problemstellung wichtig, ein Netz aus drei- und viereckigen Facetten durch möglichst kleine Bewegungen der Knoten so zu optimieren, dass alle

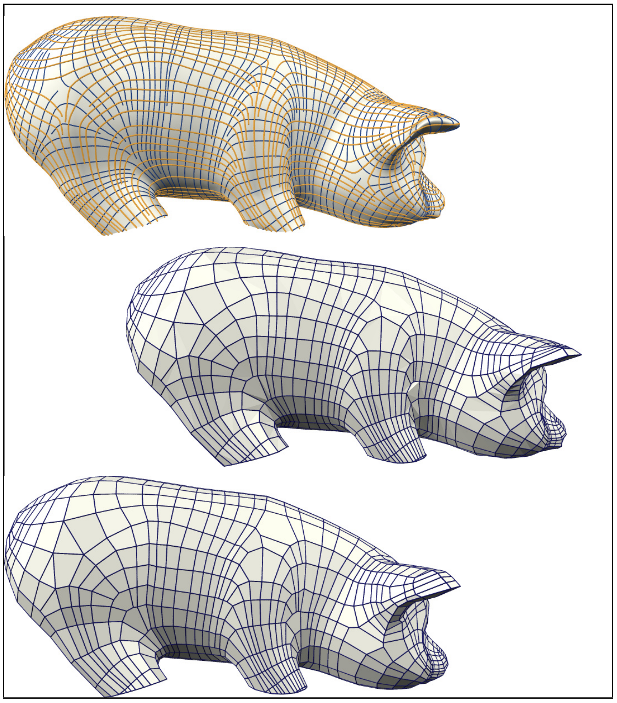
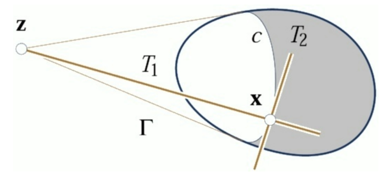


Abbildung 6: Das Krümmungsschwein aus [Liu et al. 2006]. Oben: Zwei Scharen von konjugierten Kurven auf einer Freiformfläche – hier sind die Hauptkrümmungslinien gewählt worden. Mitte: Netz, dessen Facetten hauptsächlich aus Vierecken bestehen und das dem konjugierten Kurvennetz folgt. Unten: Optimiertes Netz mit planaren Facetten. Es gibt keinen offensichtlichen Unterschied zur vorigen Figur.

Facetten, auch die viereckigen, eben werden. Die Zielfunktion für die Optimierung ist leicht gefunden: Es ist bekannt, dass ein räumliches n-Eck genau dann eben und konvex ist, wenn die Winkel zwischen den Kanten (im Intervall zwischen 0 und 180 Grad gemessen) eine Winkelsumme von 180 (n–2) Grad ergeben. Ansonsten ist die Winkelsumme echt kleiner. Die Optimierung besteht folglich in der Maximierung der Summe aller auftretenden Winkel zwischen Nachbarkanten.

Leider zeigt sich diese Zielfunktion recht widerspenstig gegenüber Optimierungsversuchen, und eine mathematische Analyse (siehe die Arbeit von Liu et al. [2006]) zeigt, dass dieses Problem ein wenig anders geartet ist als das vorige, das Dreiecksnetze betraf. Es ist mathematisch leichter zu durchschauen, dafür algorithmisch schwerer zu lösen.

Die Optimierung ist im allgemeinen nur dann möglich, wenn das Ausgangsnetz bereits fast planare Facetten besitzt. Es stellt sich also die grundsätzliche Frage nach der Segmentierung einer Freiformfläche in ein Vierecksnetz mit (fast) ebenen Facetten. Die Antwort ist in der diskreten Differentialgeometrie seit langer Zeit bekannt: Eine solche Zerlegung muss einem sogenannten konjugierten Kurvennetz auf der gegebenen Freiformfläche folgen. Abbildung 6 illustriert dieses Verfahren an einem der in der Computergraphik so gerne verwendeten Datensätze aus dem tierischen Bereich.



Um zu erklären, was ein konjugiertes Kurvennetz ist, bemühen wir wieder die Darstellende Geometrie: Zwei Scharen von Kurven (wie die gelbe und die blaue Schar in Abbildung 6) sind konjugiert, wenn in jedem Punkt wo zwei Kurven einander treffen, die Tangenten zueinander konjugiert sind. Dabei sind zwei Tangenten einer Fläche konjugiert, wenn man die eine als Lichtstrahl und die andere als Tangente an eine Schattengrenze auffassen kann. Die konjugierten Kurvennetze auf einer Fläche sind ein mathematisches Objekt, das man gut versteht.

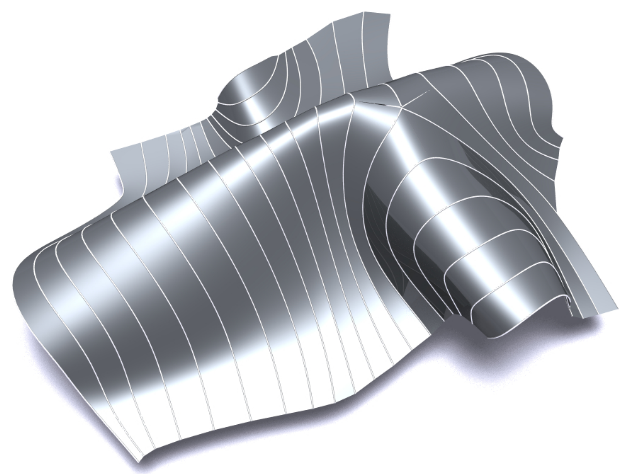


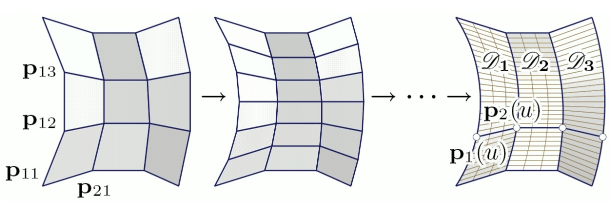
Abbildung 7: Auflösung einer Freiformfläche in eine Folge aus abwickelbaren, einfach gekrümmten Streifen.

Einfach gekrümmte Streifenmodelle

Seit Frank O. Gehry abwickelbare Flächen prominent in der Architektur eingesetzt hat (die Disney Concert Hall in Los Angeles, 1989–2004, ist hier ein Höhepunkt), stehen Freiformgeometrien, die aus gebogenem Blech erzeugt werden, im Zentrum der Aufmerksamkeit. Es ist deshalb sehr interessant,

Abbildung 8: Links: Zlote Tarasy, Warschau (Design Jerde Partnership International, Ausführung Waagner-Biro Stahlbau). Stahl-Glas-Konstruktion, die einem Dreiecksnetz folgt. Mitte: Detailansicht. Rechts: Ein Knoten, der mehrere Träger verbindet, wird aus Trägerteilen und einem zentralen durch Plasmaschneiden aus einer dicken Stahlplatte erzeugten Stück vorgefertigt. Man kann deutlich erkennen, dass die Symmetrieebenen der an dem Knoten beteiligten Träger keine eindeutige Knotenachse definieren (d.h. der Knoten ist nicht torsionsfrei).

dass zwischen der Auflösung einer Freiformfläche in eine Folge von abwickelbaren, einfach gekrümmten Blechstreifen (Abbildung 7) und der vorhin angesprochenen Segmentierung einer Fläche in ebene Vierecke ein direkter Zusammenhang besteht:



Man kann eine Abfolge von Streifen als teilweisen Limes eines regulären Vierecksnetzes mit planaren Facetten ansehen. Deshalb ist das Ersetzen einer glatten Fläche durch ein abwickelbares Streifenmodell konzeptuell nicht sehr verschieden vom Finden eines Vierecksnetzes mit planaren Facetten für diese Fläche. Für Details siehe Pottmann et al. [2008].

Mehrschichtkonstruktionen

Bei Freiformarchitektur geht es nicht nur um eine Segmentierung der gegebenen Form in baubare Einzelteile nach ästhetischen Gesichtspunkten, sondern auch um die effiziente Verbindung dieser Teile und um deren Funktion. Zum Beispiel ist es sehr wünschenswert, dass bei einer Stahl-Glas-Konstruktion die Stahlträger, die den Kanten eines Netzes folgen, in einem Knoten nicht ganz beliebig zusammenstoßen, sondern dass die Symmetrieebenen der Träger einander in einer gemeinsamen Knotenachse schneiden. Es stellt sich jedoch heraus, dass diese Forderung für Dreiecksnetze außer für Spezialfälle unerfüllbar ist (Abbildung 8).

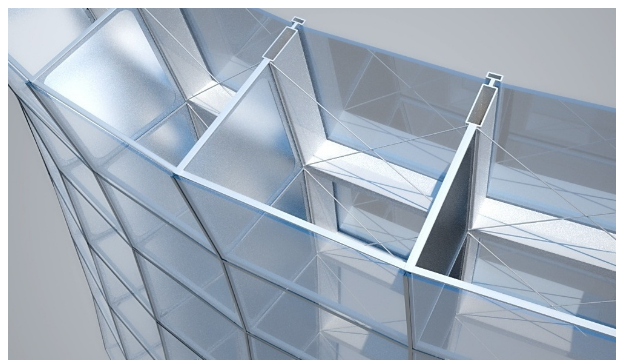


Abbildung 9: Detail einer Mehrschichtkonstruktion, die auf einem konischen Netz basiert. Eine Schicht folgt dem Netz, eine zweite folgt einem dazu parallelen Netz in konstantem Fläche-Fläche-Abstand.

Die meisten dieser funktionellen Eigenschaften lassen sich dem Begriff ‘Mehrschichtkonstruktionen’ unterordnen. Für Details verweisen wir auf die Arbeiten von Liu et al. [2006] und Pottmann et al. [2007]. Es soll hier nur exemplarisch auf die ‘konischen Netze’ eingegangen werden: Das sind Vierecksnetze, mit vier Kanten und vier Facetten pro Knoten, die die Eigenschaft haben, dass Parallelverschieben jeder Facetten-Ebene um dieselbe Schiebstrecke in Richtung der jeweils eigenen Ebennormale vier neue Ebenen erzeugt, die einander nach wie vor in einem gemeinsamen Punkt schneiden. Solche Vierecksnetze haben dann ein äußeres Parallelnetz in konstantem Fläche-Fläche-Abstand (siehe Abbildungen 9 und 10).

Es ist nicht schwer, sich zu überlegen, dass diese Eigenschaft, ein Parallelnetz zu besitzen, äquivalent zur Existenz von Drehkegeln mit Spitzen in

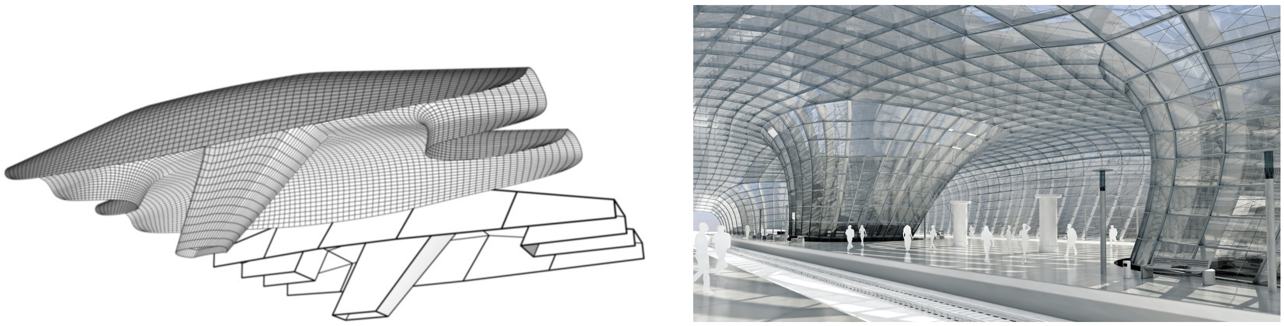
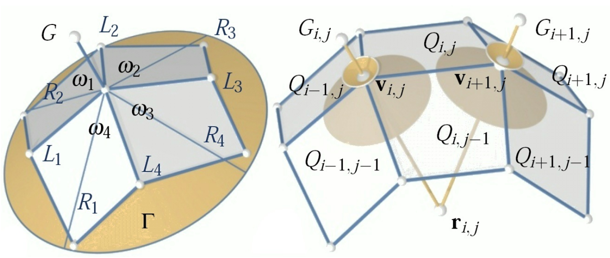


Abbildung 10: Links: Das konisches Netz im Vordergrund ist aus dem groben Netz im Hintergrund durch abwechselndes Unterteilen und Optimieren (auf Planarität der Facetten und die konische Eigenschaft) erzeugt worden. Rechts: Architekturentwurf, der auf dem diesem konischen Netz beruht (B. Schneider).

den Netzknoten ist, die die angrenzenden Facetten berühren. Interessanterweise ist diese Eigenschaft weiter äquivalent dazu, dass für jeden Knoten die Summen von einander gegenüberliegenden Winkeln zwischen Kanten gleich groß ist. Das ist für die Optimierung von Netzen hin zur konischen Eigenschaft ein großer Vorteil, weil auch die Planarität von Netzen über diese Winkel ausdrückbar ist.



Ausblick

In CAD-Systemen sind eine Fülle von Entwurfsmöglichkeiten für Freiformflächen implementiert. Methoden, die auf die Anforderungen in der Architektur abgestimmt sind, fehlen jedoch fast gänzlich. Diese müssten verbunden sein mit einer Aufteilung in Paneele, Auslegung der Unterkonstruktion, Einbeziehung von Materialien, und so fort, und gehen mit jeweils spezifischen geometrischen Problemen einher. Die angesprochene Auslegung von torsionsfreien Knoten wäre ein wichtiger Bestandteil, genauso wie die Kombination aus Unterteilungsalgorithmen mit Optimierung. Jede Realisierung von Freiformarchitektur muss eine Balance finden zwischen getreuer Wiedergabe der Form, der Komplexität der Einzelteile, dem gewünschten Material, und den vertretbaren Kosten. Hilfskonstruktionen spielen eine große Rolle, wie zum Beispiel das lokale Ersetzen einer Freiformfläche durch Regelflächen, damit auf dem Umweg über Heizdrahtschneiden von Styroporformen dann glasfaserverstärkte Betonpaneele hergestellt werden können. Geometrische Lösungen für Probleme dieser Art sind derzeit die Domäne von Spezialisten und noch weit von einer Einbindung in kommerzielle CAD-Systeme entfernt.

Danksagung

Die hier angesprochenen Forschungsergebnisse wurden zum Großteil im Rahmen des vom Österreichischen Forschungsförderungsfonds (FWF) geförderten Nationalen Forschungsnetzwerks S92 ‘Industrial Geometry’ an TU Wien und TU Graz erzielt. Die Autoren bedanken sich herzlich bei Alexander Schiftner und Heinz Schmiedhofer (TU Wien), sowie bei der Fa. Waagner Biro Stahlbau (Wien) und Evolute GmbH (Perchtoldsdorf) für das freundliche Überlassen von Daten und Bildmaterial.

Literatur

Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang, W. Wang: Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. SIGGRAPH 2006. www.geometrie.tugraz.at/wallner/quad06.pdf

H. Pottmann, Y. Liu, J. Wallner, A. Bobenko, W. Wang: Geometry of multi-layer freeform structures for architecture. SIGGRAPH 2007. www.geometrie.tugraz.at/wallner/parallel.pdf

H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini, J. Wallner: Freeform surfaces from single curved panels. SIGGRAPH 2008.
www.geometrie.tugraz.at/wallner/strip.pdf

R. Sauer: Differenzengeometrie. Springer, 1970.

A. Schiftner, M. Höbinger, J. Wallner, H. Pottmann. Packing circles and spheres on surfaces. SIGGRAPH Asia 2009.
www.geometrie.tugraz.at/wallner/packing.pdf

LEHRBUCH: H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, A. Kilian: Architekturgeometrie. Bentley Institute Press / Springer Wien, 2009.
www.architecturalgeometry.at